

CHAPITRE 01

LIMITES ET CONTINUITÉ

Niveau : Sciences Mathématiques
Année scolaire : 2026-2027

CHAPITRE

LIMITES ET CONTINUITÉ

01

HISTOIRE

La notion de limite s'est construite progressivement dans l'histoire des mathématiques. Les travaux de Leibniz, Euler, d'Alembert, Cauchy et Weierstrass ont conduit à une formulation rigoureuse de cette notion.

La limite permet d'étudier le comportement d'une fonction lorsqu'une variable se rapproche d'une valeur donnée ou d'une borne de son domaine.

CAPACITÉS ATTENDUES

1. Étudier la continuité d'une fonction en un point à l'aide des limites.
2. Étudier la continuité sur un intervalle.
3. Déterminer l'image d'un segment ou d'un intervalle par une fonction continue.
4. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
5. Utiliser la méthode de dichotomie.
6. Utiliser le théorème de la fonction réciproque.

PLAN DU COURS

1. Activités préparatoires
2. Connaissances fondamentales
 - Limite d'une fonction en un point
 - Continuité d'une fonction numérique
 - Image d'un intervalle par une fonction continue
 - Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone
 - Fonctions réciproques usuelles
3. Techniques et astuces
4. Exercices et problèmes

1. ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES

ACTIVITÉ Approche intuitive de la limite

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Comparer, dans les différentes situations graphiques,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0).$$

ACTIVITÉ Continuité à gauche et à droite

Soit f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a(x-1))}{x-1}, & -1 \leq x < 1, \\ 6x + a, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- 1) Calculer $f(1)$ et étudier la continuité à droite en 1.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et déterminer a pour que f soit continue en 1.

1. ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES (*suite*)

ACTIVITÉ Comparaison des limites

Comparer $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans les situations graphiques étudiées. Préciser dans quels cas la limite en x_0 existe.

ACTIVITÉ Prolongement par continuité

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x - 5| - 3}$. Déterminer son domaine, calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et construire, lorsque cela est possible, un prolongement continu en 2.

ACTIVITÉ Limites et partie entière

On considère $g(x) = 4(x - 1)E(x) + 3$. Montrer que, pour $\alpha \in [1/2, 5/2]$, $|g(x) - 3| \leq \alpha|x - 1|$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$.

2. CONNAISSANCES FONDAMENTALES

2.1. Limite d'une fonction en un point

ACTIVITÉ Sens intuitif

À partir des graphiques précédents, formuler précisément la notion de limite en x_0 .

DÉFINITION Limite en un point

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . On dit que f admet pour limite ℓ en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$0 < |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

EXEMPLE

Pour $f(x) = 2x + 1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (2x + 1) = 2x_0 + 1.$$

ACTIVITÉ Unicité de la limite

Montrer que si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = m$, alors $\ell = m$.

PROPOSITION Unicité

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, alors cette limite est unique.

ACTIVITÉ Limites usuelles

Déterminer :

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} k$

4) $\lim_{x \rightarrow a} (kx + b)$

2) $\lim_{x \rightarrow a} x$

5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x}$

3) $\lim_{x \rightarrow a} x^n$

6) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x}$

PROPOSITION Limites usuelles

Pour les valeurs où les expressions sont définies :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a, \quad \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \quad \lim_{x \rightarrow a} (kx + b) = ka + b,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

ACTIVITÉ Opérations sur les limites

Soient f, g telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$. Calculer les limites de $f + g$, kf , fg et f/g lorsque cela a un sens.

PROPOSITION Opérations sur les limites

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = \ell + m, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (kf) = k\ell, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (fg) = \ell m, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \frac{\ell}{m} \quad (m \neq 0).$$

2.2. Continuité d'une fonction numérique

ACTIVITÉ Continuité en un point

Comparer, dans les différentes situations graphiques, les limites à gauche et à droite en x_0 avec $f(x_0)$, puis déterminer si f est continue en x_0 .

DÉFINITION Continuité en un point

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 . f est continue en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ACTIVITÉ Continuité à gauche et à droite

Déterminer les conditions permettant de dire qu'une fonction est continue à gauche ou à droite en x_0 .

DÉFINITION Continuité à gauche et à droite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

PROPOSITION Critère gauche-droite

f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

ACTIVITÉ Prolongement par continuité

Soit f non définie en x_0 et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$. Chercher la valeur à attribuer à $f(x_0)$ pour obtenir une fonction continue.

DÉFINITION Prolongement par continuité

On définit $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\tilde{f}(x_0) = \ell$. Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 .

2.3. Image d'un intervalle par une fonction continue

ACTIVITÉ Image d'un intervalle

Observer les images de différents intervalles par des fonctions continues et conjecturer la propriété générale.

PROPOSITION Image d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

ACTIVITÉ Valeurs intermédiaires

Soit f continue sur $[a, b]$ et λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Étudier l'équation $f(x) = \lambda$.

THÉORÈME Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur $[a, b]$ et λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \lambda.$$

ACTIVITÉ Dichotomie

Pour une fonction continue ayant une unique racine α dans $[a, b]$, calculer le milieu $m = (a + b)/2$ et conserver le sous-intervalle contenant la racine.

MÉTHODE Méthode de dichotomie

Répéter le partage de l'intervalle en deux jusqu'à obtenir l'encadrement souhaité de α .

La rigueur aujourd'hui, la réussite demain !